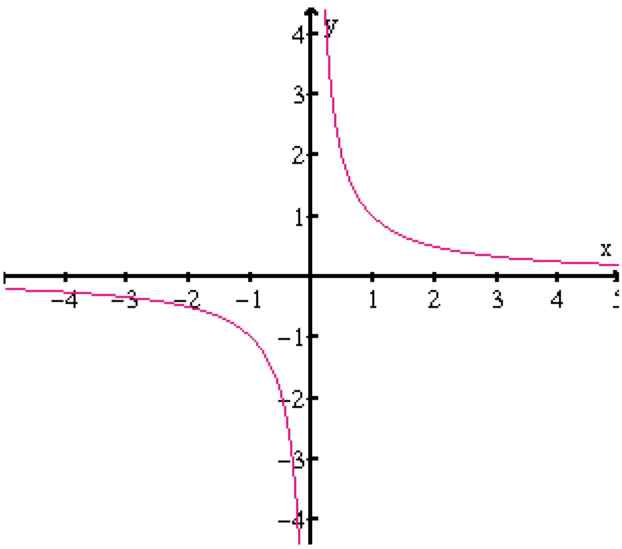
VI Rationale Funktionen

Definition

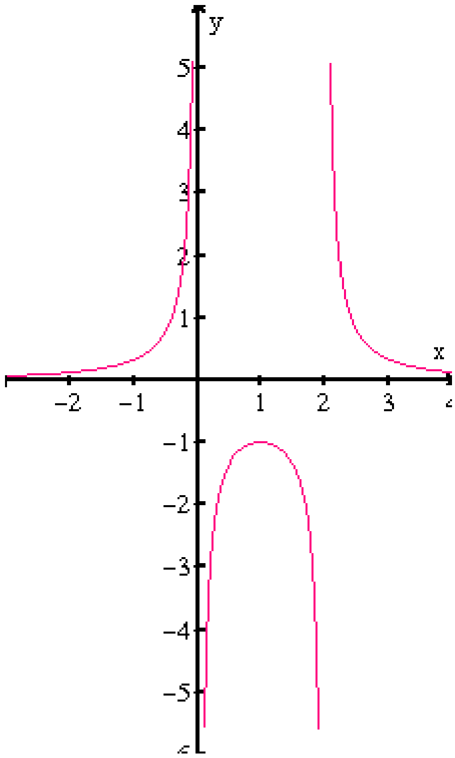
Eine Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ heißt **gebrochenrational**, falls u und v Polynomfunktionen sind und der Grad von v auch nach dem Kürzen größer als 1 ist.

Beispiele

a) $f_a(x) = 1/x$

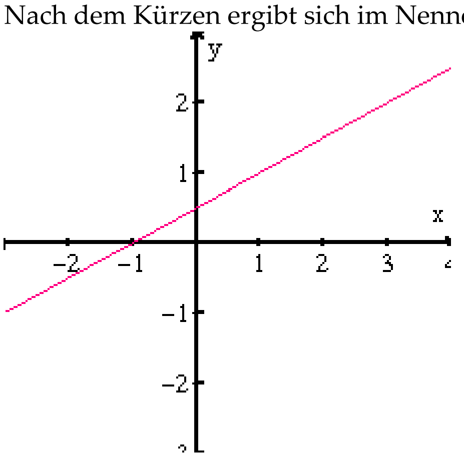


b) $f_b(x) = \frac{x+2}{x^3 - 4x}$ *Def. Lücke bei –2 !!!*



c) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{2x^2 + 8} = \frac{(x+1)(x^2-4)}{2(x^2-4)}$

Nach dem Kürzen ergibt sich im Nenner der Grad 0, es handelt sich um eine **ganzrationale** Funktion.



1 Definitionslücken

Die Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners. Im Beispiel a) von oben ist das 0, im Beispiel b) –2, 0 und 2, weil $x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, bei c) –2 und +2..

$D_{fa} = IR \setminus \{0\}$, $D_{fb} = IR \setminus \{-2,0,2\}$, $D_{fc} = IR \setminus \{-2, 2\}$.

Im Beispiel b) sind die Definitionslücken aber von unterschiedlichem Charakter:

a Stetig behebbare Definitionslücke

Hier bei x =-2 : $f(x) = \dfrac{x+2}{x(x-2)(x+2)}$ mit f(-2) = 1/8 wird die Definitionslücke stetig behoben.

b Unendlichkeitsstelle (Polstelle)

An diesen Stellen nähert sich der Graph einer senkrechten Asymptote x = c an.

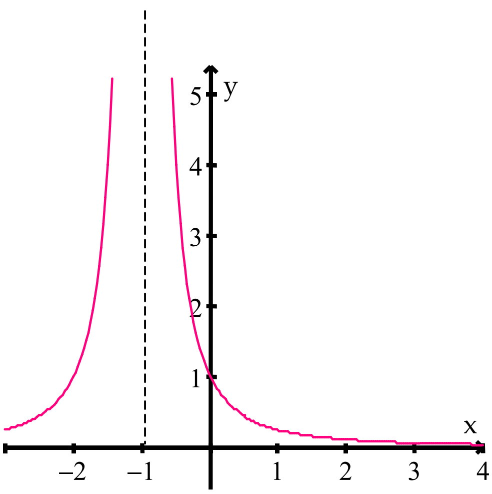
Hier: $\lim f\,(x \to 2^-) = \lim \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)x} \to -\infty$

$\lim f\,(x \to 1^+) = \lim \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)x} \to +\infty$

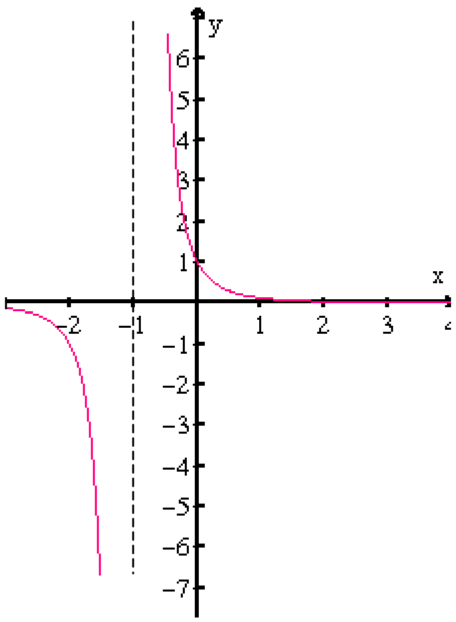
⇨ senkrechte Asymptote bei x = 2

Ist die Vielfachheit einer Nullstelle des Nennerpolynoms nach dem Kürzen geradzahlig, so ergibt sich eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, andernfalls eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel..

$f(x) = 1/(x+1)^2$



$f(x) = 1/(x+1)^3$



2 Ableitung gebrochenrationaler Funktionen

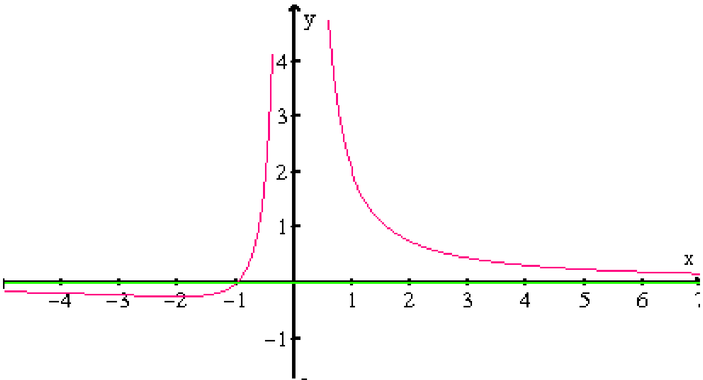
Es gilt: $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{n(x)z'(x) - n'(x)z(x)}{n^2(x)}$ (11. Klasse)

(Übungen siehe Buch)

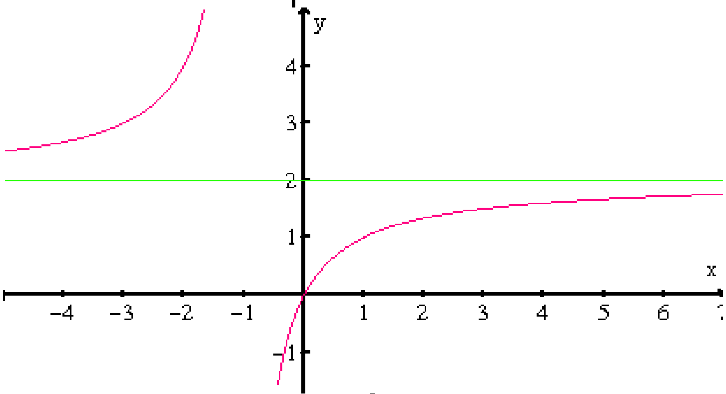
3 Verhalten im Unendlichen

Sei n = Grad n und m = Grad z
Dann gilt:

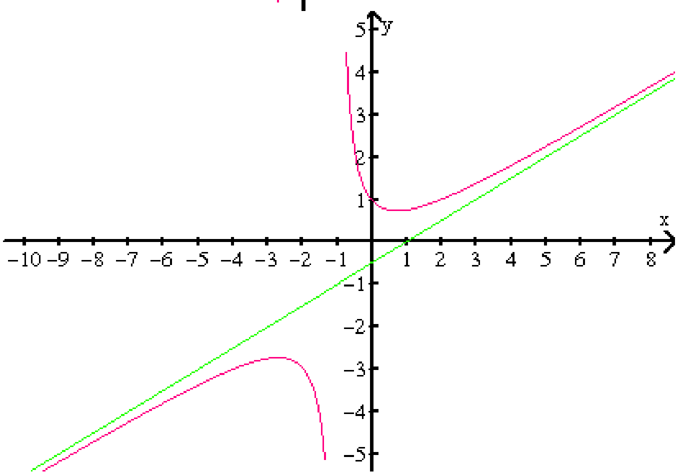
Für **n > m** : horizontale Asymptote ist x –Achse (Bsp: $f(x) = (x+1)/x^2$)
Trick: Teile durch die höchste Potenz



Für **n = m** : horizontale Asymptote (Parallele zur x-Achse) (Bsp.: $f(x)=(2x^3-2x^2)/(x^3-x)$)
Trick: Teile durch die höchste Potenz.



Für **m = n + 1** schräge Asymptote
(Trick: Polynomdivision)
Bsp: $f(x)= (\frac{1}{2} x^2+1)/(x+1)$ hat die schräge Asymptote $g(x) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}$



4 Integration

<u>Wiederholung:</u> Es gilt:

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ für $n \in Z \setminus \{-1\}$;

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$