VII Ergänzungen zur Integralrechnung

Wichtig ist die sicher Kenntnis der Grundintegrale FS. S. 66. Die Integrale auf S. 67 und weitere Integrale ergeben sich aus der Anwendung der folgenden Integrationsregeln.

1 *Integration durch Substitution*

Sei F eine Stammfunktion zu f (also: F'(x) = f(x)). Sei g eine weitere differenzierbare Funktion und existiert H(x) = F(g(x)), so ist: h(x) := H'(x) = f(g(x)) g'(x) (Kettenregel).
Es ist also H(x) Stammfunktion von h(x). Und damit:

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Satz: Sei f auf [a;b] stetig, g auf [a;b] differenzierbar und existiere f nach g, so gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = [F(g(t))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Die Integration auf diesem Wege heißt **Substitutionsverfahren.**

Beispiel:

$$\int_0^4 \sqrt{e^x - 1} \cdot e^x dx$$

Es ist f (x) = $\sqrt{e^x - 1} \cdot e^x = \sqrt{g(x)} \cdot g'(x)$

$g(x) \quad g'(x)$

Da f (u) = $\sqrt{u}$ gilt F (u) = $\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$
und damit

$$\int_0^4 \sqrt{e^x - 1} \cdot e^x dx = \tfrac{2}{3}(e^4 - 1)^{\frac{3}{2}}$$

Auch für das unbestimmte Integral gilt:

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c}$$

Bisher: Substitution, falls g'(x) im Integranden als Faktor vorkommt

Jetzt: Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ **mit Hilfe einer geeigneten Funktion g(t) = x (g muss umkehrbar sein)**

Herleitung:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Vertausche x und t:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)dt \text{ mit } x=g(t)$$

=> $t = g^{-1}(x)$, falls g umkehrbar ist.

Es sei $g(a) = c \Rightarrow a = g^{-1}(c)$

$g(b) = d \Rightarrow b = g^{-1}(d)$

$$\Rightarrow \int_c^d f(x)dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

Statt c und d schreiben wir der Ästhetik wegen wieder a und b:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt \quad \text{mit } x = g(t) \text{ und g umkehrbar.}}$$

Beispiel

1. $\displaystyle\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx$

a. Wähle t

$t = 2x-3$

b. Löse nach x auf.

$x = \frac{t+3}{2} = g(t)$

c. Leite nach t ab:

$g'(t) = \frac{1}{2}$

d. Bilde die Umkehrfunktion von g und berechne $g^{-1}(b)$ und $g^{-1}(a)$

$g^{-1}(t) = 2t - 3$

$g^{-1}(2) = 1$

$g^{-1}(6) = 9$

e. Setze ein

$$\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx = \int_1^9 \frac{\frac{t+3}{2}}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{t}\right]_1^9 = 7\tfrac{1}{3}$$

2 Partielle Integration

Sei f = uv mit f' = u'v + uv'.
Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = [f(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b$$

Also:

Satz: Sei u und v auf [a;b] stetig differenzierbar, so gilt:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

Beispiele:

1) $\int_a^b \ln(x)1dx$ Stammfkt xlnx-x

2) $\int_a^b 3xe^{2x}dx$ einmal falsch, einmal richtig machen.

3 *Uneigentliche Integrale*

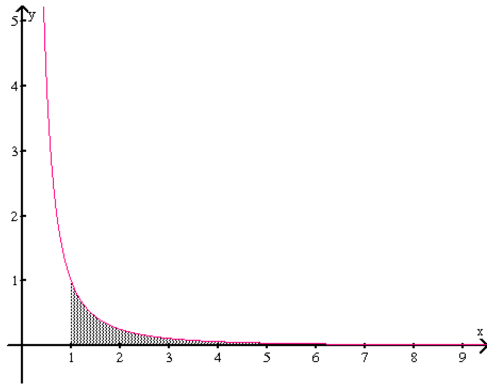
Im folgenden wird immer von stetigen Funktionen gesprochen.

Beispiel

Gegeben sei die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 1/x^2$

Die Integralfunktion $F(x) = \int_1^x f(t)dt = -\frac{1}{x} + 1$ ist insbesondere für alle $x > 1$ definiert.

Auch der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} F(x)$ existiert und hat den Wert 1, d.h. der Flächeninhalt des Flächenstücks strebt für $x \to \infty$ gegen 1.



Anwendung:

Die Gravitationskraft im Feld der Erde ist $K(x) = \frac{GmM_{Erde}}{x^2}$. Um einen Körper aus dem Schwerefeld der Erde zu lösen, muss die Arbeit $W = \lim_{x \to \infty} \int_1^x K(t)dt = \frac{GmM_{Erde}}{x}$ verrichtet werden.

Definition:

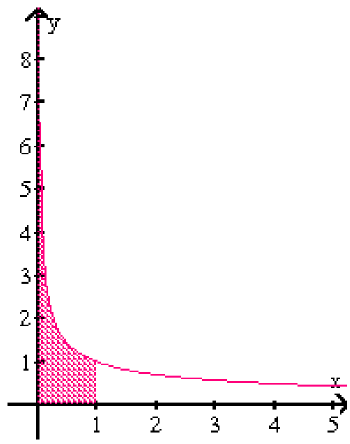
$\boxed{\int_a^\infty f(t)dt := \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)dt}$ heißt **uneigentliches Integral,** wenn der Grenzwert existiert.

Bemerkung:

Gilt entsprechend für $-\infty$.

Beispiel:

Sei $0 < x < 1$. Dann gilt für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$: $F(x) = \int_x^1 f(t)dt = 2 - 2\sqrt{x}$. Da f bei 0 nicht definiert ist, kann dort F nicht definiert sein, aber es gilt: $\lim_{x \to 0+} F(x) = 2$, d.h. die zugehörige Fläche nähert sich für $x \to 0$ an den Wert 2 an.



Definition:

Ist f(x) auf]a,b] integrierbar, und am linken Rand des Intervalls nicht beschränkt, so heißt

$\boxed{\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt}$ **uneigentliches Integral**, falls der Grenzwert existiert.

Bemerkung:

Gilt entsprechend, falls f am rechten Intervallrand unbeschränkt.