Analytische Geometrie

Intention:
Erarbeitung eines Verfahrens, mit dessen Hilfe man jede geometrische Aufgabe durch Rechnung lösen kann.

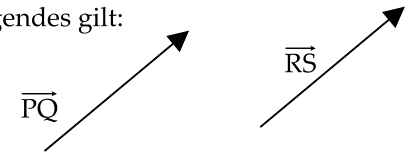
I Vektoren und Vektorräume

1 Pfeile und Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen. Physik: Kraft, Geschwindigkeit, Weg, El. Feldstärke... Darstellung durch Pfeile.

Definition

1. Jedes geordnete Paar (P|Q) zweier Punkte P und Q beschreibt einen **Pfeil** $\overrightarrow{PQ}$. P ist der **Anfangspunkt,** Q der **Endpunkt** des Pfeils.
2. Zwei Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ heißen **parallelgleich**, wenn folgendes gilt:
   a. PQ||RS
   b. Sie haben die gleiche Richtung
   c. $\overline{PQ} = \overline{RS}$

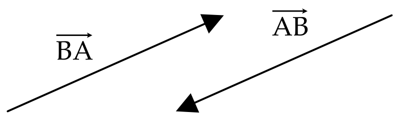


3. Die Menge aller zu $\overrightarrow{PQ}$ parallelgleichen Pfeile heißt **Vektor** $\overrightarrow{PQ}$. Jeder einzelne Pfeil aus der Menge heißt **Repräsentant des Vektors.**

Bemerkungen
(1) Zeichnen kann man immer nur einen Repräsentanten, nie einen Vektor.
(2) Nicht immer unterscheidet man streng zwischen einem Vektor und seinem Repräsentanten.

Schreibweisen
(1) $\overrightarrow{PQ}$ (2) $\vec{a}$ (3)  deutsche Schrift

Gegenvektor und Nullvektor
$\overrightarrow{BA}$ ist der **Gegenvektor** zu $\overrightarrow{AB}$. Man schreibt: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

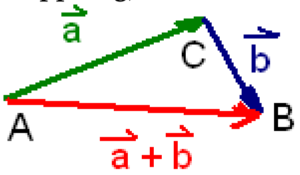


Der Vektor mit der Länge 0 heißt **Nullvektor** $\vec{0}$**.** Der Nullvektor hat keine Richtung.

Betrag eines Vektors
$|\vec{a}| = a$: Länge des Pfeils. Ist $|\vec{a}|=1$, so nennt man den Vektor **Einheitsvektor.** Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es eindeutig einen gleichsinnig parallelen Einheitsvektor.

2 Die Addition von Vektoren

Physik: Die Ermittlung der resultierenden Kraft aus zwei Kräften, die an einem Körper angreifen, geschieht durch Aneinanderhängen der zugehörigen Kraftpfeile.
Die Vektoraddition wird dargestellt durch die Addition zweier Repräsentanten. Der Summenvektor beginnt am Fuß des ersten Vektors und endet an der Spitze des zweiten Vektors (**Spitze-Fuß-Kopplung**).



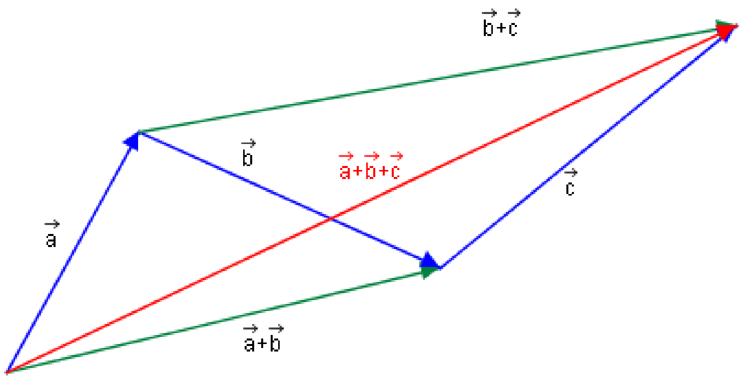
Definition
Sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Dann heißt $\overrightarrow{AC}$ **Summe der Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}:=\overrightarrow{AC}}$

Definition der Differenz
Als Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet man die Summe von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$.

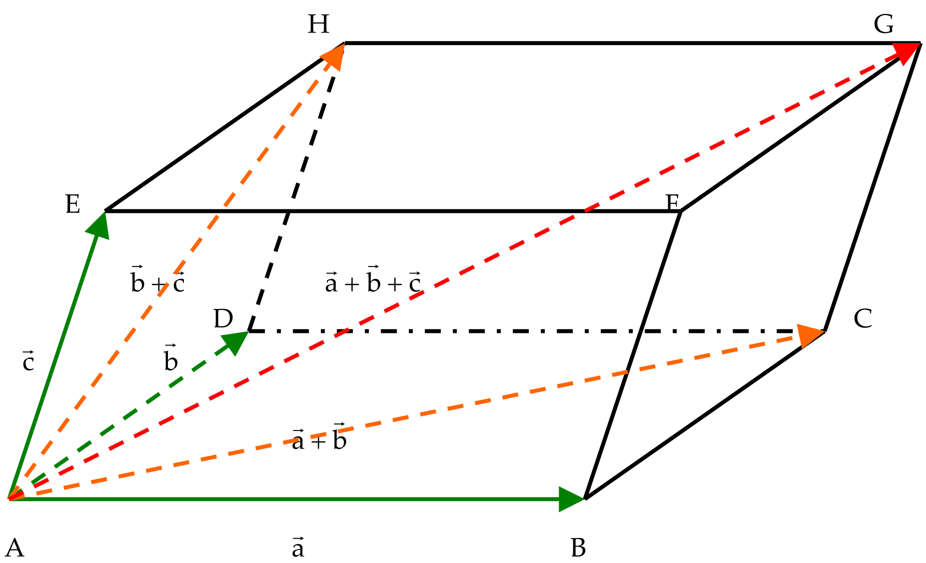
$\boxed{\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b})}$.

Summe von mehr als zwei Vektoren



in der Ebene

(unten: Zeichnen: $\vec{a}$ (5r, 0 h); $\vec{b}$ (3r, 2h); $\vec{c}$ (1r, 5h))



Bestimme in Abhängigkeit von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$\overrightarrow{BE} = \vec{c} - \vec{a}$

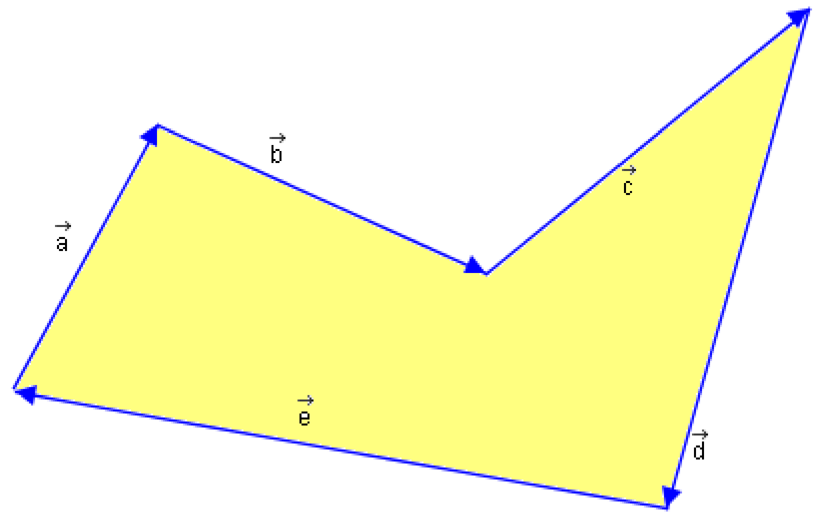
$\overrightarrow{FH} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{GB} = -\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{BH} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Geschlossene Vektorkette

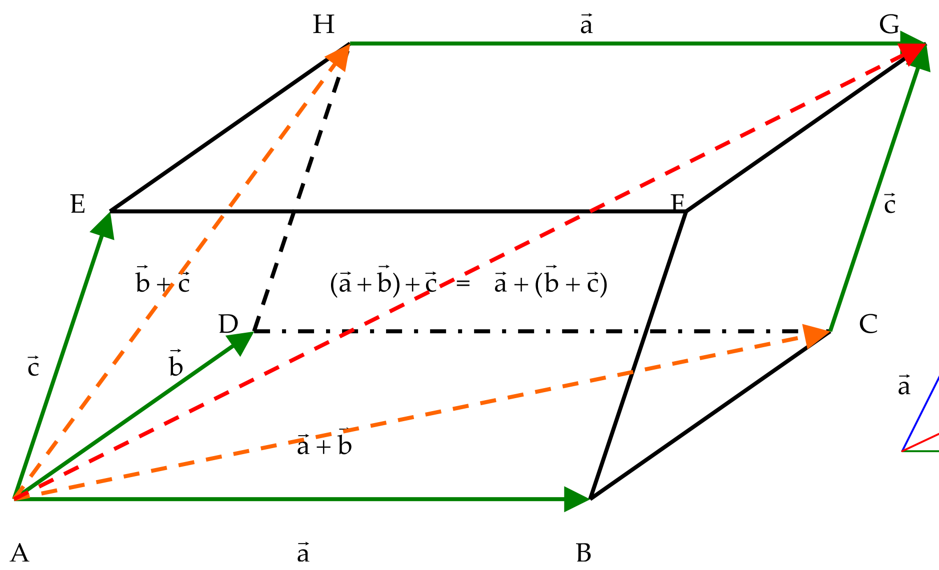


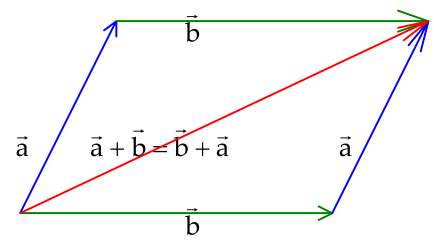
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{0}$

Für die Addition von Vektoren gelten folgende Gesetze:
(1) Die Summe zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. (ABGESCHLOSSENHEIT)
(2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ASSOZIATIVITÄT)
(3) Für alle $\vec{a}$ gilt: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (EXISTENZ DES NEUTRALEN ELEMENTS)
(4) Für jeden Vektor $\vec{a}$ existiert ein INVERSES ELEMENT - $\vec{a}$ mit $\vec{a}+\overrightarrow{(-a)}=\vec{0}$
(5) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (KOMMUTATIVITÄT)

Eine Menge, auf der eine Verknüpfung mit dem Gesetzen (1) – (4) definiert ist, heißt **Gruppe**, gilt auch noch (5), so heißt die Gruppe **abelsch** (oder kommutativ).
(Referatthema!)

- Veranschaulichung der Axiome (2) und (5)





- Beispiele für Gruppen auf bekannten Zahlenmengen
  keine Gruppen: ($\mathbf{N}_0$, +); ($\mathbf{Z}$, ·) (Inverse!); Gruppen: ($\mathbf{Z}$, +); ($\mathbf{Q}$, +); ($\mathbf{Q}$, ·); ($\mathbf{R}$, +); ($\mathbf{R}$, ·);
- Deckdrehungsgruppe des gleichseitigen Dreiecks

- (**R³, +**): Tupel aus drei reellen Zahlen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit der darauf definierten Addition:

  Wegen der Gültigkeit der Gruppenaxiome und in 3. beschriebener Gesetze wird sich (R^3, +) als Model lfür den dreidimensionalen Raum eignen!

  $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

  Überprüfung der Gruppenaxiome:

  1. Abgeschlossenheit: Mit a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 **R** gilt:
     $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \in R \\ \in R \\ \in R \end{matrix}\right\} \in R^3$$
  2. A-Gesetz: siehe Buch S. 22
  3. Neutrales Element: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
  4. Invers zu $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$
  5. K-Gesetz: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

  Aufgaben: Buch S. 19/3, 5; 27/3, 6

3 Die S-Multiplikation; Vektorraum

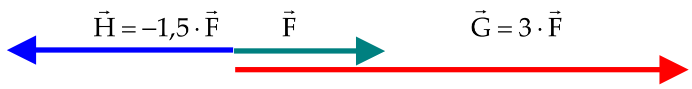
Will man eine Kraft zwar der Richtung nach beibehalten, ihren Betrag aber verändern, so wird man symbolisch die Länge des Kraftpfeils verändern.

$\vec{G} = k \cdot \vec{F}$

$\vec{G}$ hat k-fache Länge von $\vec{F}$

$k > 0$: gleichgerichtet

$k < 0$: entgegengesetzte Orientierung



Definition

Ist $\vec{a}$ ein Vektor und k , so versteht man unter $k \cdot \vec{a}$ einen zu $\vec{a}$ parallelen Vektor der $|k|$-fachen Länge von $\vec{a}$, der für $k > 0$ gleichsinnig, für $k < 0$ gegensinnig zu $\vec{a}$ orientiert ist ($0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$). Man nennt $k \cdot \vec{a}$ die S-Multiplikation (= Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar)

Für die S-Multiplikation gelten folgende Gesetze

(1) **Gemischtes Assoziativgesetz**

$m \cdot (n \cdot \vec{a}) = (m \cdot n) \cdot \vec{a}$

Bsp: $(-3) \cdot ((-2) \cdot \vec{a}) = ((-3) \cdot (-2)) \cdot \vec{a} = 6\vec{a}$

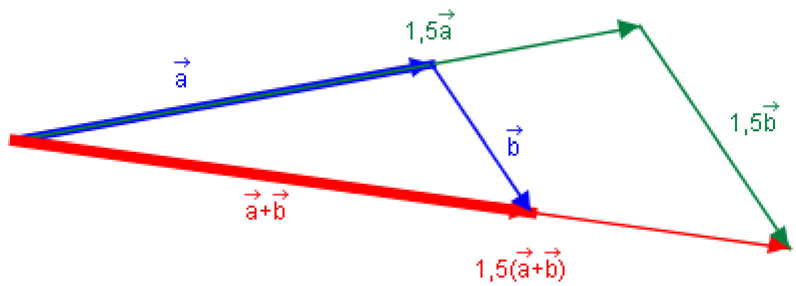
(2) **1. Distributivgesetz**

$m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a} = (m + n) \cdot \vec{a}$

Bsp: $4\vec{a} + 3\vec{a} = 7\vec{a}$; $3\vec{a} - 4{,}5\vec{a} = -1{,}5\vec{a}$

(3) **2. Distributivgesetz**

$m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} = m \cdot (\vec{a} + \vec{b})$



(4) **Neutrales Element der Multiplikation**

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Definition

Eine Menge von Elementen, die eine additive abelsche Gruppe bilden und für die die Gesetze der S-Multiplikation gelten, heißt **linearer Vektorraum.**

Beispiel

Für den in Kapitel 2 beschriebenen **R**³ lässt sich eine S-Multiplikation definieren durch

$s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$ (z. B. Assoziativgesetz: $r \cdot \left[s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = r \cdot \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs \cdot a_1 \\ rs \cdot a_2 \\ rs \cdot a_3 \end{pmatrix} = (rs) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$)