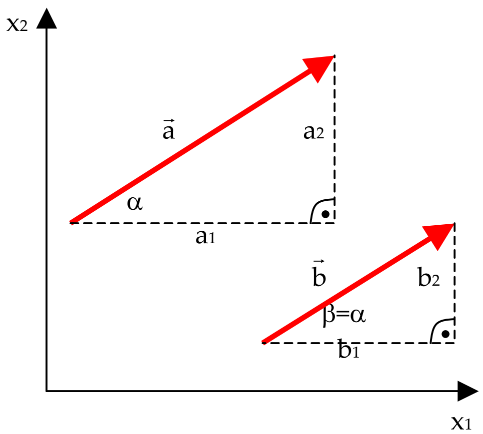
2 *Lineare Abhängigkeit*

- *Welche Vektoren lassen sich durch zwei gegebene Vektoren darstellen? Betrachtung des Problems in der Tafelebene: Alle! Wie hätte ich meine Vektoren nicht wählen dürfen: Parallel!*
- *Also: Spezialfall: Wenn einer der Vektoren keine neue Information (Richtung) beisteuert, sondern eh durch die anderen ausgedrückt werden kann. (Begriff aufspannen)*
- *Am Bild: Wenn ich einen durch die anderen darstellen kann, kann ich auch immer einen Nullzug bilden (nichttrivialen Nullzug!!!!!!)*

a Kollinearität



Parallele Vektoren haben die gleiche Steigung m = tan α.
Man nennt solche Vektoren **kollinear** oder **linear abhängig**.

Erkennungsmerkmal:

$\tan\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow a_1 = kb_1 \wedge a_2 = kb_2$

$\boxed{\Rightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}}$ mit $k \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$

Beispiele:

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = k \cdot 2 \\ 4 = k \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1{,}5 \\ k = 0{,}5 \end{cases}$ nicht gleichzeitig erfüllbar.

   Die beiden Vektoren sind nicht kollinear (linear unabhängig)

2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = k \cdot 12 \\ 4 = k \cdot 16 \\ 2 = k \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases}$ gleichzeitig erfüllbar.

   Die beiden Vektoren sind kollinear (linear abhängig)

   Es gilt also $\vec{a} = \frac{1}{4} \cdot \vec{b}$ bzw. dazu äquivalent: $\vec{a} - \frac{1}{4} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ (**nichttriviale Nullsumme**)

Definition

1. Triviale Nullsumme zweier Vektoren: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$

   Nichttriviale Nullsumme zweier Vektoren: $m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} = \vec{0}$, $(m|n) \neq (0|0)$
2. Zwei Vektoren heißen **linear abhängig (kollinear),** falls sie eine nichttriviale Nullsumme bilden.

b Lineare Unabhängigkeit von drei und mehr Vektoren

Analoge Übertragung von zwei auf drei Vektoren:

$$k_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + k_3 \cdot \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$$

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ einzige Lösung $\qquad (k_1 \mid k_2 \mid k_3) \neq (0 \mid 0 \mid 0)$

$\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\}$ linear unabhängig $\qquad \{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\}$ linear abhängig

Beispiel 1

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bedingung:

$$k_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + k_3 \cdot \overrightarrow{v_3} = \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 0 \end{array}$$

=> Alle Tripel $(-\frac{1}{2}k_3 \mid -\frac{1}{3}k_3 \mid k_3)$ mit $k_3 \in IR$ erfüllen die Bedingung. Mit diesen Koeffizienten ungleich Null bilden die Vektoren ein geschlossenes Vektordreieck und sind linear abhängig.

Beachte

Drei linear abhängige Vektoren können untereinander parallel sein (paarweise linear abhängig) (*Skizze mit 2 oder 3 Vektoren parallel!*). Oder sie liegen wegen des geschlossenen Vektordreiecks in einer gemeinsamen Ebene: **Komplanarität.**

Beispiel 2

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bedingung:

$$k_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + k_3 \cdot \overrightarrow{v_3} = \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_2 - k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (I) + (II) 5k_2 = 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 0 \underset{k_3 = 0}{\Rightarrow} k_1 = 0 \end{array}$$

=> Nur das Tripel $(0 \mid 0 \mid 0)$ erfüllt die Bedingung. $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\}$ linear unabhängig.

Beachte:

Genau dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind, lässt sich einer von ihnen (mit Koeffizienten $\neq 0$) durch eine Linearkombination der restlichen Vektoren ausdrücken

$k_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + k_3 \cdot \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $k_3 \neq 0$

$\Leftrightarrow k_3 \cdot \overrightarrow{v_3} = -k_1 \cdot \overrightarrow{v_1} - k_2 \cdot \overrightarrow{v_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{v_3} = -\frac{k_1}{k_3} \cdot \overrightarrow{v_1} - \frac{k_2}{k_3} \cdot \overrightarrow{v_2}$

Verallgemeinerung auf n Vektoren

Betrachtet wird die Linearkombination $\vec{0} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{a_n}$.

Existieren reelle Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$, von denen mindestens eine ungleich Null ist, die die Gleichung erfüllen, so sagt man die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots \overrightarrow{a_n}$ sind **linear abhängig** sonst **linear unabhängig.**

Auch hier ist äquivalent: Ein Vektor mit $k_n \neq 0$ lässt sich durch die anderen linear kombinieren.

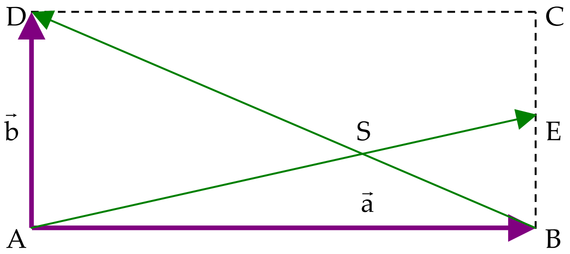
c Lineare Abhängigkeit als geometrisches Beweisprinzip

Expertenarbeit!

Verfahren

a) Suche zwei linear unabhängige Vektoren, die die Figur aufspannen.
b) Suche eine geschlossene Vektorkette, die den Teilpunkt als Eckpunkt enthält.
c) Benütze die lineare Unabhängigkeit, um die gesuchten Parameter zu bestimmen.

Beispiel 1:
Im Rechteck ABCD halbiert E die Seite [BC]. In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken [AE] und [BD] gegenseitig?



zu a) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen das Rechteck auf.

zu b) Die von ABS aufgespannte geschlossene Vektorkette enthält den Teilpunkt S.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SA}=\vec{0}$ (*)

zu c) Die Vektoren $\overrightarrow{BS}$ und $\overrightarrow{SA}$ lassen sich als skalare Vielfache von $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AE}$ ausdrücken; diese wiederum lassen sich aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear kombinieren:

Setze: $\overrightarrow{AS}=\mu\overrightarrow{AE}=\mu(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})$

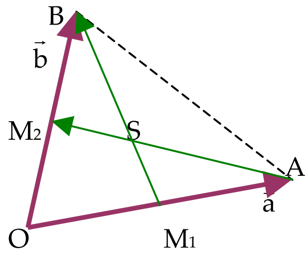
$\overrightarrow{BS}=\lambda\overrightarrow{BD}=\lambda(-\vec{a}+\vec{b})$

Eingesetzt in (*) unter Beachtung von $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AS}$:
$\vec{a}+\lambda(-\vec{a}+\vec{b})-\mu(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})=\vec{0}$
Umgruppiert nach den beiden aufspannenden Vektoren:
<=> $(1-\lambda-\mu)\vec{a}+(\lambda-\frac{1}{2}\mu)\vec{b}=\vec{0}$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist nur die triviale Lösung möglich:
$$\left.\begin{array}{l}(I)\,1-\lambda-\mu=0\\(II)\,\lambda-\frac{1}{2}\mu=0\end{array}\right\}\overset{\text{Add.}}{\Rightarrow}1-\frac{3}{2}\mu=0\Rightarrow\mu=\frac{2}{3}\text{ in (II)}:\lambda=\frac{1}{3}$$

Ergebnis: S teilt [AE] im Verhältnis 2 : 1 und [BD] in 1 : 2.

Beispiel 2:
Im Dreieck OAB seien von A und B aus die Seitenhalbierenden gezogen. Zeige, dass sich die Seitenhalbierenden wie 2 : 1 teilen!



zu a) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen das Dreieck auf.

zu b) Die von OM_1SM_2 aufgespannte geschlossene Vektorkette enthält den Teilpunkt S.
$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1S}+\overrightarrow{SM_2}+\overrightarrow{M_2O}=\vec{0}$ (*)

zu c) Die Vektoren $\overrightarrow{M_1S}$ und $\overrightarrow{SM_2}$ lassen sich als skalare Vielfache von $\overrightarrow{BM_1}$ und $\overrightarrow{AM_2}$ ausdrücken; diese wiederum lassen sich aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear kombinieren:

Setze: $\overrightarrow{M_1S} = \mu\overrightarrow{M_1B} = \mu(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{SM_2} = \lambda\overrightarrow{AM_2} = \lambda(-\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b})$

Eingesetzt in (*):

$\tfrac{1}{2}\vec{a} + \mu(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) + \lambda(-\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) - \tfrac{1}{2}\vec{b} = \vec{0}$

Umgruppiert nach den beiden aufspannenden Vektoren:

<=> $(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu - \lambda)\vec{a} + (\mu + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2})\vec{b} = \vec{0}$

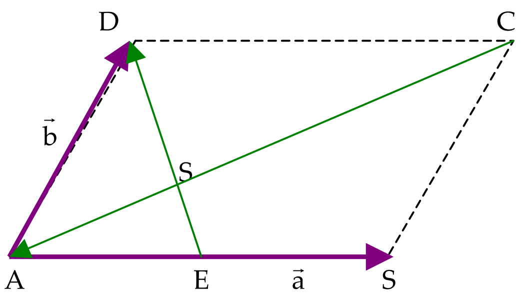
Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist nur die triviale Lösung möglich:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu - \lambda = 0\\ (\mathrm{II})\ \mu + \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2} = 0\end{array}\right\} \stackrel{(\mathrm{I})+2\cdot(\mathrm{II})}{\Rightarrow} -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mu = 0 \Rightarrow \mu = \tfrac{1}{3} \text{ in (II)}: \lambda = \tfrac{1}{3}$$

Ergebnis: Die Seitenhalbierenden teilen sich im Verhältnis 2 : 1

Beispiel 3:

Im Parallelogramm ABCD halbiert E die Seite [AB]; S ist der Schnittpunkt von [AC] und [ED]. In welchem Verhältnis teilt S die Strecken [AC] und [ED]?



zu a) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen das Rechteck auf.

zu b) Die von AES aufgespannte geschlossene Vektorkette enthält den Teilpunkt S.

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$ (*)

zu c) Die Vektoren $\overrightarrow{ES}$ und $\overrightarrow{SA}$ lassen sich als skalare Vielfache von $\overrightarrow{ED}$ und $\overrightarrow{CA}$ ausdrücken; diese wiederum lassen sich aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear kombinieren:

Setze: $\overrightarrow{ES} = \mu\overrightarrow{ED} = \mu(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{SA} = \lambda\overrightarrow{CA} = \lambda(-\vec{a} - \vec{b})$

Eingesetzt in (*):

$\tfrac{1}{2}\vec{a} + \mu(-\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) + \lambda(-\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$

Umgruppiert nach den beiden aufspannenden Vektoren:

<=> $(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu - \lambda)\vec{a} + (\mu - \lambda)\vec{b} = \vec{0}$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist nur die triviale Lösung möglich:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu - \lambda = 0\\ (\mathrm{II})\ \mu - \lambda = 0\end{array}\right\} \stackrel{(\mathrm{I})-(\mathrm{II})}{\Rightarrow} \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\mu = 0 \Rightarrow \mu = \tfrac{1}{3} \text{ in (II)}: \lambda = \tfrac{1}{3}$$

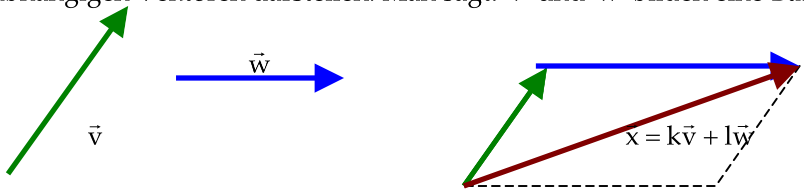
Ergebnis: S teilt die Strecken jeweils im Verhältnis 1 : 2.

3 Basis und Dimension

Ich will mit Hilfe von ein paar Vektoren einen ganzen Vektorraum erzeugen. Wie viele brauche ich? Um sicher zu gehen nehme ich halt alle! Geht es auch mit weniger => linear abhängige bringen nichts Neues!

a. Vektoren der Ebene

Jeder Vektor einer Ebene lässt sich eindeutig als Linearkombination von zwei festgelegten linear unabhängigen Vektoren darstellen. Man sagt: $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bilden eine **Basis** der Anschauungsebene.



b. Der abstrakte Vektorraum R^2

In R^2 sind $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig und spannen den ganzen R^2 auf, z.B. $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$,

bilden also eine Basis.

Besonders übersichtlich: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ **kanonische Basis (Standardbasis).**

c. Vektoren des Raums

Zwei Vektoren erzeugen höchstens eine Ebene. Nur drei linear unabhängige Vektoren spannen den ganzen Anschauungsraum auf.

d. Der abstrakte Vektorraum R^3

eine Basis unter vielen: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$

Besonders übersichtlich: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ **kanonische Basis.**

Definitionen

1. Lässt sich in einem Vektorraum V jeder Vektor als Linearkombination von Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ darstellen, so heißt die Menge $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ ein **Erzeugendensystem** von V.
2. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt **Basis,** deren Elemente **Basisvektoren.**
3. Die Anzahl der in der Basis enthaltenen Vektoren heißt **Dimension (dim V)** des Vektorraums.

Bemerkung

Die Anschauungsebene sowie R^2 haben die Dimension 2, der Anschauungsraum sowie R^3 die Dimension 3. R^n hat allgemein die Dimension n.

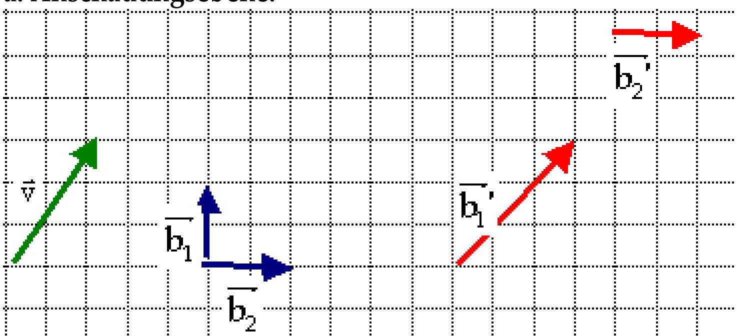
Beispiele: im Raum zeigen, wie viele Basen gibt es für den R^2, R^3

Sätze

1. Ein linear abhängiges Erzeugendensystem lässt sich zu einer Basis verkleinern.
2. Alle Basen eines Vektorraums V haben die selbe Anzahl an Basisvektoren, nämlich dim V.
3. In einem Vektorraum mit dim V = n ist jede Menge von mehr als n Vektoren linear abhängig, jede Menge von weniger Vektoren kein Erzeugendensystem.

4 Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis

a. Anschauungsebene:



In einem Vektorraum V mit Basis B lässt sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination darstellen.

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} : \vec{v} = 1{,}5\vec{b}_1 + 1\vec{b}_2$

1. Koordinate 2. Koordinate bzgl. B

$B' = \{\vec{b}_1', \vec{b}_2'\} : \vec{v} = 1\vec{b}_1' - 0{,}5\vec{b}_2'$

1. Koordinate 2. Koordinate bzgl. B′

Definition

Die Koeffizienten der Linearkombination der Basisvektoren, die einen Vektor $\vec{v}$ darstellt, nennt man **Koordinaten** des Vektors bezüglich dieser Basis. Das Produkt aus Koordinate und dem zugehörigen Basisvektor nennt man **Komponente** des Vektors.

Schreibweise (im obigen Beispiel)

Die Koordinaten werden häufig als **Koordinatenspalte** $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}_{B'}$ geschrieben. Ist die Basis eindeutig, lässt man das B weg.

b. Koordinaten im abstrakten Vektorraum R³

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in R^3 \text{ mit } B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bedingung:

$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{b}_1 + k_2 \cdot \vec{b}_2 + k_3 \cdot \vec{b}_3$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $k_1 = 2$; $k_2 = 0$; $k_3 = 1$.

Also: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B1}$

Bezüglich der kanonischen Basis $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ führt die Lösung des Gleichungssystems zu

$$\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}_{B0}$$

Beachte

1. Die Koordinaten eines Vektors sind bezüglich verschiedener Basen i. a. verschieden.
2. Bei der kanonischen Basis stimmen die Koordinaten mit dem n-Tupel, das den Vektor definiert, überein.
3. Mit Koordinatenspalten (n Koordinaten) kann man bezüglich einer Basis rechnen wie mit Vektoren des abstrakten R^n.

Ergänzung zum letzten Kapitel (3.): Prüfung, ob eine Menge B von Vektoren in R^n Basis ist

- 1. Schritt: Prüfe, ob B mehr oder weniger als n Elemente enthält. Dann kann B keine Basis sein!
- 2. Schritt: B enthält also n Elemente. Es genügt nun, entweder zu zeigen, dass diese n Vektoren linear unabhängig sind oder man zeigt, dass sie den R^n erzeugen.

Beispiel 1:

1. $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ (Vorweg: es handelt sich um eine Basis!)

1. Weg: Prüfung der linearen Unabhängigkeit über nichttriviale Nullsumme

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overset{II,III}{\Rightarrow} l = 0, m = 0 \Rightarrow k = 0$$

Nur auf triviale Weise lässt sich der Nullvektor bilden. Die Vektoren bilden also eine Basis.

2. Weg: (etwas länger) Prüfung der linearen Unabhängigkeit über Erzeugbarkeit jedes Vektors.

Sei $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in R^3$ beliebig. Lässt sich $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ als Linearkombination erzeugen?

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\overset{III}{\Rightarrow} m = c, l = b \Rightarrow k = a - l = a - b$$

Es gilt also $(a-b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d.h. jeden Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ kann man als Linearkombination der drei Vektoren darstellen.

Beispiel 2:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$ (Vorweg: es handelt sich um keine Basis!)

1. Weg: Prüfung der linearen Unabhängigkeit über nichttriviale Nullsumme

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k=-m; l=-m => k=l$

Wählt man nun Zahlen k = l = -m, z.B. K = 1, l = 1, m = -1, so erkennt man:

$$1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$, es gibt also eine nichttriviale Nullsumme, die Vektoren sind linear abhängig und somit keine Basis.

2. Weg: (etwas länger) Prüfung der linearen Unabhängigkeit über Erzeugbarkeit jedes Vektors.

Sei $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3$ beliebig. Lässt sich $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ als Linearkombination erzeugen?

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} <=> \left\{\begin{matrix}k+l+2m=a\\l+m=b\\k+m=c\end{matrix}\right\} <=> \left\{\begin{matrix}k+l+2m=a\\l=b-m\\k=c-m\end{matrix}\right\} \overset{\text{II,IIIinI}}{=>} c+b=a$$

Damit folgt unmittelbar, dass sich nur Vektoren erzeugen lassen, die der Bedingung c + b = a genügen, das sind aber beiweiten nicht alle Vektoren aus R^3. Es handelt sich also um kein Erzeugendensystem, also um keine Basis.