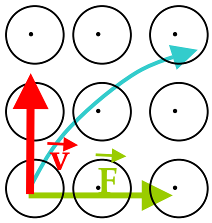
VI Das Vektorprodukt

1 Einführung und Eigenschaften



Motivation für neue „Produkt"-Definition aus der Physik:
Die Lorentzkraft
Ein pos. geladenes Teilchen, das sich in einem Magnetfeld senkrecht zu den magn. Feldlinien bewegt, erfährt eine ablenkende Kraft senkrecht zu Bewegungsrichtung und Feldrichtung. (Rechte-Hand-Regel)
Bilden Geschwindigkeit und Magnetfeld einen beliebigen Winkel, so bestimmt der zur Geschwindigkeit senkrechte Anteil vom Magnetfeldvektor die ablenkende Kraft (qvB sinα). Auch andere phys. Zsh. (Drehmoment!)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Vektoren des IR^3, so ist der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} =: \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Beweis: Man rechnet nach: $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{b} = 0$ (Hausaufgabe!)

Eigenschaften dieses Vektorprodukts:

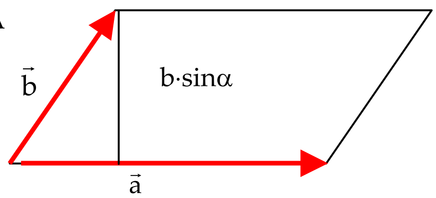
1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem ($\vec{a}$ Daumen, $\vec{b}$ Zeigefinger, $\vec{a} \times \vec{b}$ Mittelfinger)

2) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab\sin\alpha$ [Beweis: Da sin >= 0 für Winkel aus [0;180°] zeigen wir: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = a^2b^2\sin^2\alpha$:

$$\text{r.S.} = a^2b^2\sin^2\alpha = a^2b^2(1-\cos^2\alpha) = a^2b^2 - \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3^2b_3)^2 =$$
$$= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$$
$$\ldots$$
$$= (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$
$$= (\vec{a} \times \vec{b})^2$$

3) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ist die Maßzahl des Flächeninhalts eines Parallelogramms mit Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

Bew: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab\sin\alpha = A$



4) $A_{Dreieck} = ½ \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ analog.

5) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (Rechtssystem!)

6) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (Beweis: Einsetzen, ausrechnen)

2 *Folgerungen und Anwendungen*

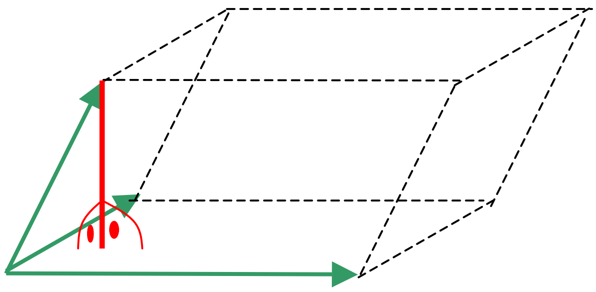
1) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind senkrecht zu $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b})$
Logisch: Ver-k-fachung einer Parallelogrammseite ergibt k-fache Parallelogrammfläche

3) $\vec{b} = k\vec{a}$ <=> $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ (nachrechnen)

4) **Volumen des Parallelflachs**



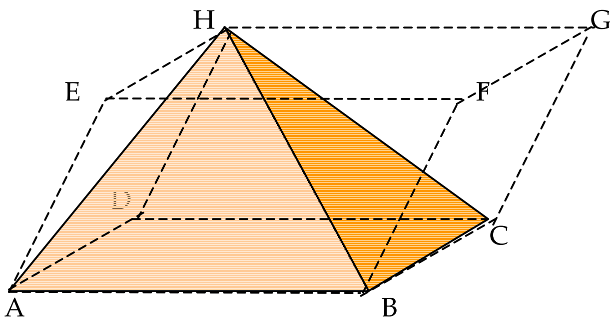
Grundfläche nach 1.3): $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$ Höhe: $h = |\vec{c}| \cdot \cos\alpha$

Volumen: $\boxed{V = A\,h = |\vec{a} \times \vec{b}|\ |\vec{c}| \cdot \cos\alpha = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}$

Der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen kann negativ werden, wenn $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}_{\vec{a} \times \vec{b}}$ gegengerichtet sind.

Es gilt: $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \det\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$, wie man leicht nachrechnet!

5) **Volumen einer Pyramide**



$V_{\text{Pyr ABCDH}} = 1/3\ Gh = 1/3\ |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

$V_{\text{Vierflach ABDE}} = ½\ V_{\text{Pyr}} = 1/6\ |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$