Stochastik

Ein Schulhausmeister weiß aus Erfahrung, dass 75% der Schüler, die am Kiosk Leberkässemmeln einkaufen, diese **ohne** Ketchup wollen.

1. ②/③ Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter den nächsten
   a) 20 Bestellungen genau 6 mit Wunsch nach Ketchup?
   b) 100 Bestellungen mindestens 70 ohne Wunsch nach Ketchup?
2. ③ Berechnen Sie mit der lokalen Näherungsformel von de Moivre und Laplace die Wahrscheinlichkeit, dass unter 124 Käufern genau 31 mit Wunsch nach Ketchup sind.
3. je ④ Nun werden 100 Semmeln verkauft. In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert wird die Anzahl der Semmeln ohne Ketchup mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegen
   a) bei Abschätzung mit der Tschebyschow-Ungleichung?
   b) bei Berechnung mit der Normalverteilung?
4. ③ Wie viele Leberkässemmeln müssen mindestens verkauft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine mit Ketchup darunter ist?

Zur Information über die Mittagsverpflegung werden achtzig Prospekte über Gulaschsuppe ausgelegt. 70% der Schüler nehmen erfahrungsgemäß das Informationsschreiben mit.

5. ⑤ Wie viele Schüler dürfen sich heute höchstens am Kiosk anstellen, wenn die Prospekte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% ausreichen sollen?

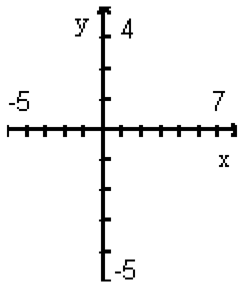
Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{(x-2)^2}$ ($x \in D_{fa}$) gegeben.

6. ④ Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich sowie Null- und Polstellen der Funktion in Abhängigkeit von a. Für welchen Wert von a gibt es eine doppelte Nullstelle? Für welchen Wert von a gibt es eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel?
7. ⑥ Ermitteln Sie die erste und zweite Ableitung von f_a!
   Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion G_{fa} für $a = 12$ keine lokalen Extrempunkte besitzt.
   Ermitteln Sie den Wert für a, für den der Graph der Funktion f_a bei $x_w = 0$ eine Wendestelle hat.

Im folgenden werde der Fall a = 8 betrachtet. Durch Einsetzen ergibt sich

$$f_8'(x) = \frac{-4x+16}{(x-2)^3}, \quad f_8''(x) = \frac{8(x-5)}{(x-2)^4}$$



8. ⑧ Untersuchen Sie G_{f8} auf Extrem- und Wendepunkte und das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.
9. ④ Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_8 im skizzierten Bereich (Einheit 1 cm) !
10. ⑥ Ermitteln Sie mit Hilfe des Substitutionsverfahrens eine integralfreie Darstellung
    für $F(x) = \int_x^1 f_8(t)\,dt$ ($x < 2$)

Viel Erfolg! Gesamtpunktzahl: 52

Stochastik

$p = 75\%$

X: Anzahl der Semmeln ohne Ketchup

1a. $n = 20$ $\quad P(X = 14) = P(20; 0{,}75; 14) = 16{,}9\%$

1b. $n = 100$ $\quad P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 69) = 1 - F_{100;0,75}(69) = 1 - 0{,}10379 = 0{,}89621$

2. $n = 124; P(X = 124 - 31) = B(124, 0{,}75, 93) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{4{,}82}\varphi\left(\frac{0}{4{,}82}\right) = 8{,}3\%$

3. $n = 100$

   Ges: k mit $P(|X - \mu| < k) \geq 0{,}95$

   a) $P(|X - \mu| < k) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}X}{k^2} \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}95 \leq 1 - \frac{\mathrm{Var}X}{k^2} \Leftrightarrow 0{,}05 \geq \frac{\mathrm{Var}X}{k^2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{npq}{0{,}05}} = 19{,}4$

   => Im Intervall]55; 95[wird die Anzahl der Semmeln ohne Ketchup liegen.

   b) $P(|X - \mu| < k) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{k+0{,}5}{4{,}33}\right) - 1 \geq 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k+0{,}5}{4{,}33}\right) \geq 0{,}975 \Leftrightarrow \frac{k+0{,}5}{4{,}33} \geq 1{,}96 \Leftrightarrow k \geq 7{,}99$

   => Im Intervall]69; 83[wird die Anzahl der Semmeln ohne Ketchup liegen.

4. P („keine mit Ketchup“) $< 1\% \Leftrightarrow 0{,}75^n < 1\% \Leftrightarrow n > \ln 0{,}01 / \ln 0{,}75 > 16$

   Es müssen mindestens 17 Semmeln verkauft werden.

5. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der Kioskbesucher, die einen Prospekt mitnehmen. Y ist binomial verteilt mit $p = 0{,}70$. Es muss gelten: $P(Y \leq 80) \geq 90\%$

   Bei Näherung von de Moivre-Laplace mit der Normalverteilung ergibt sich:

   $$\Phi\left(\frac{80 - n \cdot 0{,}7 + 0{,}5}{0{,}458\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}90 \Rightarrow \frac{80{,}5 - n \cdot 0{,}7}{0{,}458\sqrt{n}} \geq 1{,}29 \Rightarrow 80{,}5 - n \cdot 0{,}7 \geq 0{,}591082\sqrt{n}$$

   $$0 \geq n \cdot 0{,}7 + 0{,}591082\sqrt{n} - 80{,}5$$

   Positive (und damit sinnvolle) Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung ist: $\sqrt{n_1} = 10{,}3$

   => $n_1 = 106{,}3$

   Es dürfen also höchstens 106 Kioskbesucher kommen.

Analysis

$$f_a(x) = \frac{3x^2 - ax}{(x-2)^2}$$

6. $D_{fa} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; Nullstellen: a/3 und 0. Polstelle 2. Nur im Fall a = 0 (n.def.) gäbe es also eine doppelte Nullstelle. Für a = 6 gibt es eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

7.

$$f_a'(x) = \frac{(6x - a)(x-2) - (3x^2 - ax) \cdot 2}{(x-2)^3} = \frac{6x^2 - 12x - ax + 2a - 6x^2 + 2ax}{(x-2)^3} = \frac{-12x + ax + 2a}{(x-2)^3}$$

$$f_a''(x) = \frac{(-12 + a)(x-2) - (-12x + ax + 2a)3}{(x-2)^4} = \frac{-12x + ax + 24 - 2a + 36x - 3ax - 6a}{(x-2)^4} = \frac{24x + 24 - 2ax - 8a}{(x-2)^4}$$

a=12: $f'_{12}(x) = \frac{24}{(x-2)^3}$ => keine Extremstellen für a = 12

$f_a''(0) = 0 \Rightarrow a = 3$.

$f_3''(x) = \frac{18x}{(x-2)^4}$ Wegen Vorzeichenwechsel bei x = 0 liegt ein Wendepunkt vor.

8.

$$f_8'(x) = \frac{-4x+16}{(x-2)^3}, \quad f_8''(x) = \frac{8x-40}{(x-2)^4}$$

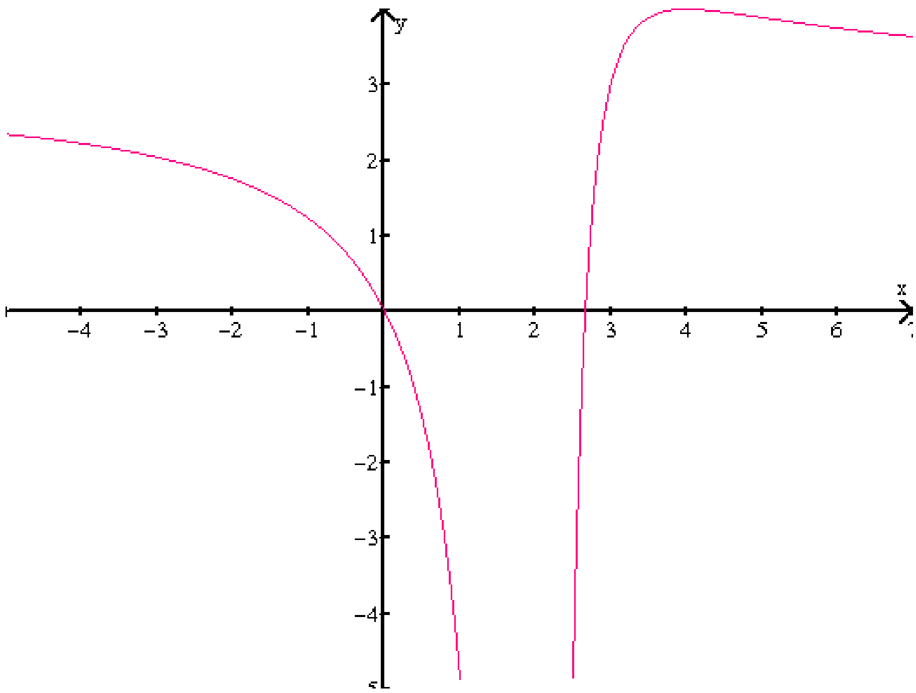
Verhalten im Unendlichen: lim f(x) = 3 für x -> ± ∞ (z.B. über mehrfache Anwendung der l'Hospitalschen Regel)

Bei Annäherung an 2 ist der Zähler negativ. Der Nenner ist positiv und geht gegen Null. Die Funktion strebt also bei Annäherung von beiden Seiten gegen -∞.

Koordinaten des Extrempunktes: P_{max} (4; 4)

Aufgrund der 2. Ableitung handelt es sich um ein Maximum.
Der Wendepunkt liegt bei (5|35/39). Der Nachweis erfordert z.B. eine Untersuchung des Vorzeichenwechsels der 2. Ableitung.

9.



10. Ermitteln Sie mit Hilfe des Substitutionsverfahrens eine integralfreie Darstellung für

$$F(x) = \int_x^1 \frac{3t^2-8t}{(t-2)^2}\,dt$$

Substitution: $s = t - 2$

$t = s + 2$

$dt/ds = 1$

untere Grenze: $x - 2$

obere Grenze: -1

Insgesamt:

$$\int_x^1 \frac{3t^2-8t}{(t-2)^2}dt = \int_{x-2}^{-1} \frac{3(s+2)^2-8(s+2)}{s^2}ds = \int_{x-2}^{-1} \frac{3s^2+4s-4}{s^2}ds = \int_{x-2}^{-1} 3+\frac{4}{s}-\frac{4}{s^2}ds$$

$$= \left[3s+4\ln|s|+\frac{4}{s}\right]_{x-2}^{-1} = [-3-4]-\left[3x-6+4\ln|x-2|+\frac{4}{x-2}\right] = -3x-1-4\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}$$