# I Ergebnis- und Ereignisräume

## *1 Zufallsexperimente*

**Definition:**
Ein Experiment, welches beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholbar ist und dessen Ergebnis nicht mit Bestimmtheit vorhergesagt werden kann (d.h. es gibt mind. 2 Mgk.), heißt **Zufallsexperiment.**

**Beispiel:**

1. Würfelwurf: Mögliche Ergebnisse: Augenzahlen 1 – 6

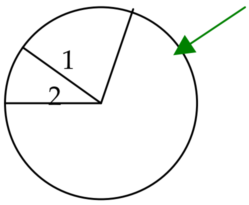
2. Münzwurf: Mögliche Ergebnisse: Kopf (K) oder Zahl (Z)

3. Ziehen aus einer Urne:

   Mögliche Ergebnisse: weiße oder grüne Kugel

4. Glücksrad

   Mögliche Ergebnisse:1, 2 oder 3

5. Roulette (als eine Art Glücksrad)

6. Leibnitz dachte, dass bei 2 Würfeln die Summen 11 und 12 gleich häufig seien:
   S. 12 Nr. 1, Evt. als Gruppenarbeit
   0: Augensumme 2 – 10: 100, 86, 95, 94, 80, 95 -> 750
   1: Augensumme 11: 6, 10, 3, 7, 15, 3 -> 44
   2: Augensumme 12: 6, 4, 2, 4, 10, 2 -> 28

# 2 *Ergebnisraum*

## 2.1 Definition

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes $\omega_i$ (i = 1, ...., n) werden zu einer Menge zusammengefasst; diese nennt man **Ergebnisraum Ω.**

**Beispiel: Werfen eines Würfels**
Folgende Ergebnisräume können betrachtet werden:
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\Omega_2 = \{6, \text{keine } 6\}$ $\Omega_3 = \{g, u\}$ $\Omega_4 = \{1, 2, ..., 6, \text{Kante}, \text{Ecke}\}$
$\omega_1$........................ $\omega_6$ $\omega_1$ $\omega_2$

**Aber:**
$\Omega_5 = \{\text{gerade}, \text{prim}\}$
ist kein Ergebnisraum, da der Augenzahl 2 beide Elemente von $\Omega_5$ zugeordnet werden**.**

**Bedingung an einen Ergebnisraum:**
Jedem möglichen Ausgang des Zufallsexperimentes darf nicht mehr als ein Element aus Ω zugeordnet werden.

**Definition:**
Die **Mächtigkeit |Ω|** ist die Anzahl der Elemente zum Ergebnisraum Ω.

Beispiele:
17/2
$\Omega = \{(a|b)|\ a \quad \{1, 2, 3,...6\} \quad b \quad \{Z, K\}\}$
$= \{(1|Z), (2|Z), (3|Z), (4|Z), (5|Z), (6|Z),$
$(1|K), (2|K), (3|K), (4|K), (5|K), (6|K)\}$
$|\Omega| = 12$

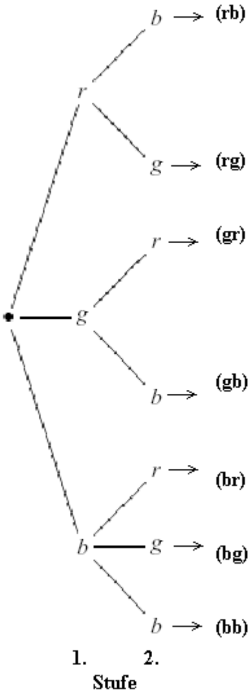
18/4
$\Omega = \{(a|b)|\ a, b \quad \{1, 2, 3,4\} \quad a < b\}$
$= \{(1|2), (1|3), (1|4), (2|3), (2|4), (3|4)\}$
$|\Omega| = 6$

HA: 18/ 3, 5, 6

## 2.2 Mehrstufige Zufallsexperimente

## a Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen

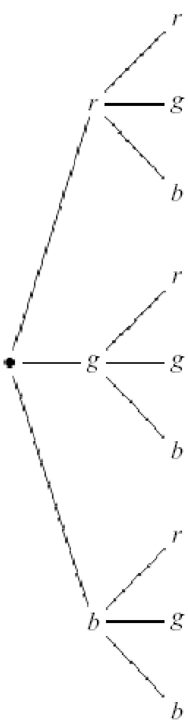
In einer Urne befinden sich eine rote, eine gelbe und zwei rote Kugeln. Die gezogenen Kugeln werden nicht zurückgelegt.




Baumdiagramm zum Ablesen der Ergebnisse.
(Evt. Zahlenwerte für Wahrscheinlichkeiten für jede Stufe propädeutisch eintragen, bei der Wurzel und der 1. Stufe jeweils die restlichen Kugeln notieren.)

Ω = {(r|b); (r|g); (g|r); (g|b); (b|r); (b|g); (b|b)}
= {(x|y)| x,y {r, b, g} (x|y) ≠ (r|r) (x|y) ≠ (g|g) }
|Ω| = 7

## b Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen




Aus der gleichen Urne wie in 2.2.1 werden zwei Kugeln gezogen und in die Urne zurückgelegt.

Baumdiagramm wie in 2.2.1 mit den zusätzlichen Möglichkeiten (r|r) und (g|g)
Ω = {(x|y)| x,y {r, b, g} }
|Ω| = 9

18/5

### c n-Tupel als Ergebnisse

**Beispiel**
dreimaliges Werfen eines Würfels
Ergebnisse: ($\omega_1 \omega_2 \omega_3$)
1., 2., 3. Wurf
$\Omega$ ={(1|1|1); (1|1|1);...}

Die Ergebnisse eines n-stufigen Zufallsexperiments sind n-Tupel ($\omega_1| \omega_2|...|\omega_n$)wobei $\omega_i$ irgendein Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist. $\Omega$ ist dann die Menge aller dieser n-Tupel.
Jedes n-Tupel stellt genau einen Pfad im Baumdiagramm vom Start bis zum Endpunkt dar.

## *3 Ereignisraum*

(= Potenzmenge von $\Omega$; $\mathbb{P}(\Omega)$ = Menge aller Teilmengen von $\Omega$)

## 3.1 Definition

**Beispiel: Einmaliger Würfelwurf**
Ergebnisse: $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = 2$, ...; $\omega_6 = 6$
Ergebnisraum $\Omega$ = Menge der Ergebnisse = $\{\omega_1; \omega_2, ...; \omega_6\}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Betrachte eine Teilmenge E von $\Omega$:
E := „Nicht sechs“ = {1, 2, 3, 4, 5}
Die Menge E ist ein **Ereignis.**

**Definition:**
1. Jede Teilmenge E eines endlichen Ergebnisraums $\Omega$ heißt **Ereignis**.
2. Das Ereignis *E* tritt genau dann ein, wenn ein $\omega$ als Versuchsergebnis vorliegt, das in *E* enthalten ist.
3. Die Menge aller Ereignisse heißt **Ereignisraum.**
= Menge aller Teilmengen von $\Omega$
= Potenzmenge von $\Omega$ = $\mathbb{P}(\Omega)$

**Beispiele:**
$\Omega$ = {1, 2, 3}
$\mathbb{P}(\Omega)$ = {{},{1};{2};{3},{1,2};{2,3};{1,3};{1,2,3}}
Hier noch einmal Pfeil auf ein Ereignis und auf ein Ergebnis; Hinweis, das die Ereignisse „den möglichen Spielen/Setzungen“ entspricht!

**Besondere Ereignisse:**
1. {} = unmögliches Ereignis
2. $\Omega$ = sicheres Ereignis
3. $\{\omega\}$ Elementarereignis, unterscheide zu $\omega$ als Ergebnis

**Mächtigkeit des Ereignisraumes:**

| |
|---|
| Ist $|\Omega|$ = n, so gilt<br>$|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^n$ |

Mächtigkeit = Anzahl der Elemente

**Beweis:**
Vollständige Induktion nach n

**Bemerkung:**
Alle Ereignisse lassen sich schreiben als Vereinigung von Elementarereignissen.

**Beispiel:**

$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} = \bigcup_{i=1}^{3}\{\omega_i\}$

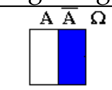
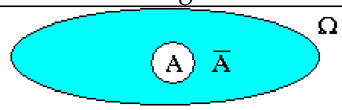
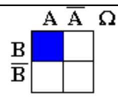
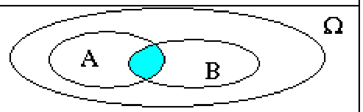
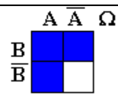
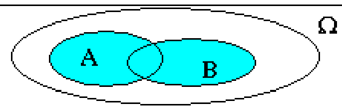
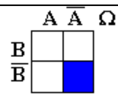
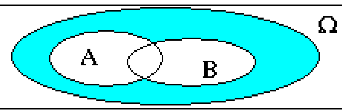
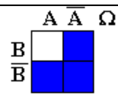
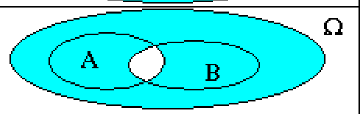
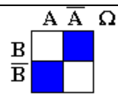
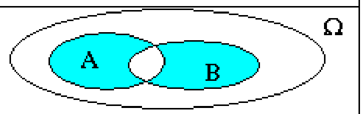
Allgemein: $E = \bigcup_{\omega \in E}\{\omega\}$

## 3.2 Mengenalgebra (Ereignisalgebra)

**Beispiel: Einmaliger Würfelwurf** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
„Augenzahl gerade“ : $E_1 = \{2, 4, 6\}$
„Augenzahl nicht prim“: $E_2 = \{1, 4, 6\}$

„Augenzahl gerade oder nicht prim“: $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 4, 6\}$
„Augenzahl gerade und nicht prim“: $E_1 \cap E_2 = \{4, 6\}$

**Übersicht über die Verknüpfungsmöglichkeiten zweier Ereignisse A und B:**

| Sprechweisen | Term im math. Modell | Veranschaulichung Karnaughdiagramm | Veranschaulichung Venndiagramm[1] |
|---|---|---|---|
| Gegenereignis zu A; nicht das Ereignis A | $\overline{A}$ sprich: A quer |  |  |
| Ereignis A und Ereignis B; Beide Ereignisse, Sowohl A als auch B | $A \cap B$ |  |  |
| Ereignis A oder B; Mindestens eines der Ereignisse | $A \cup B$ |  |  |
| Keines der Ereignisse; Weder A noch B | $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ |  |  |
| Höchstens eines der Ereignisse; nicht beide Ereignisse | $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ |  |  |
| Genau eines der Ereignisse; Entweder A oder B; ausschl. Oder | $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ |  |  |

HA 26/1, 2

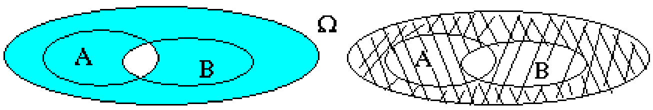
[1] John Venn (1834 - 1923)
Der englische Logiker John Venn benutzte erstmalig den Terminus symbolische Logik. Er gilt als Vorläufer der Wahrscheinlichkeitslogik von Reichenbach und untersuchte Probleme der Modalurteile.
Venn ist als Schöpfer der ellipsoiden Diagramme der mathematischen Logik bekannt (= Venn-Diagramme), die eine Weiterentwicklung der Eulerschen Kreise sind. Mit Hilfe eines Systems zweier sich überschneidender Kreise oder Ellipsen brachte er die Beziehungen zwischen Klassen bzw. Umfängen von Begriffen zum Ausdruck.
In seinen Arbeiten systematisierte er das in der Algebra der Logik gegen Ende des 19. Jh. gesammelte Material.

**Gesetze der Mengenalgebra**

| | |
|---|---|
| Kommutativgesetze | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativgesetze | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Distributivgesetze | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| neutrale Elemente | $A \cup \emptyset = A$<br>$A \cap \Omega = A$ |
| dominante Elemente | $A \cup \Omega = \Omega$<br>$A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| Komplement | $A \cup \overline{A} = \Omega$<br>$A \cap \overline{A} = \emptyset$ |
| Idempotenzgesetze | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ |
| Absorptionsgesetze | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ |
| Gesetze von de Morgan | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$<br>$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$<br>$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ |

**Beweis zu de Morgan b)**

zz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$




**Anwendungen: Vereinfache**

1.
$$(A \cap \overline{B}) \cup [(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)]$$
$$\overset{\text{Distr}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup [(\overline{A} \cup A) \cap B]$$
$$\overset{\text{Kompl}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup [\Omega \cap B]$$
$$\overset{\text{neutr}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup B$$
$$\overset{\text{Distr}}{=} (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)$$
$$= A \cup B$$

2. 27/6

## 3.3 Unvereinbare Ereignisse

**Definition:**

1. Die Ereignisse A und B heißen **unvereinbar (disjunkt)** genau dann, wenn $A \cap B =$ ist.
2. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots A_n$ heißen **unvereinbar (disjunkt)** genau dann, wenn $A_1 \cap \ldots \cap A_n =$ ist.
3. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots A_n$ heißen **paarweise unvereinbar (paarweise disjunkt)** genau dann, wenn $A_i \cap A_j =$ für alle i, j {1,2, ...,n} mit $i \neq j$ ist.